Integrationsmetoder

• **Datorspel är tidsdiskreta!**

• **Explicita analytiska funktioner för hastighet och acceleration saknas**

Position är integral av hastighet

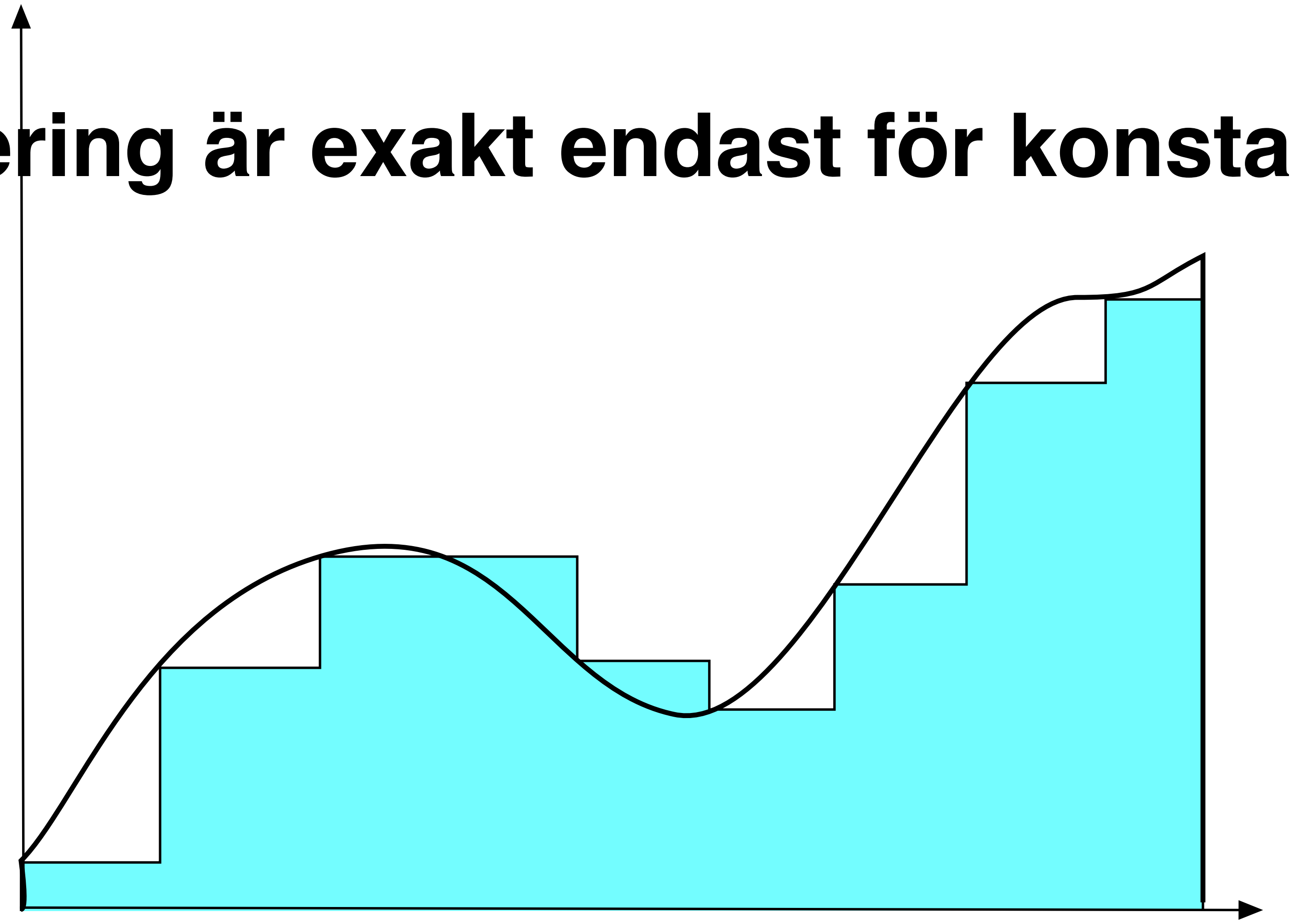
Hastighet är integral av acceleration

Eulerintegrering är exakt endast för konstant funktion!

Eulerintegrering

Samplar funktionsvärdet och adderar

Eulerintegrering är exakt endast för konstant funktion!



Eulerintegrering

$$x_{i+1} = x_i + v_i{*}dt$$
$$v_{i+1} = v_i + a{*}dt$$

Risk för instabilitet. Ju snabbare en funktion varierar, desto större risk. Fjädersystem kan komma i oscillerande tillstånd.

Felet minskar vid kortare steglängd. I praktiken innebär detta antingen högre framerate eller att man stegar mer än en gång per frame.

Taylorexpansion

Med Taylorexpansion av funktionen kan vi analytiskt hitta bättre metoder

$$x(t+h) = x(t) + h * dx/dt + h^2/2 * d^2x/dt^2 \ldots$$

Eulerintegrering är enbart de två första termerna. Ger ett fel på $O(h^2)$, vilket är mycket.

Andra metoder

Verletintregrering
Adams-Bashforth
Predictor-corrector
Runge-Kutta
Adaptiv steglängd

Verletintegration

Hastigheten (funktionens förstaderivata) integreras inte utan beräknas från positionerna.

Tag ett steg i varera riktningen:

$$x(t+h) = x(t) + h \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h^3}{6} \cdot \frac{d^3x}{dt^3} + O(h^4)$$

$$x(t-h) = x(t) + -h \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + -\frac{h^3}{6} \cdot \frac{d^3x}{dt^3} + O(h^4)$$

Addera dessa två, lös ut x(t):

$$x(t+h) = 2 \cdot x(t) - x(t-h) + h^2 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + O(h^4)$$

O(h^3)-termen försvann!

Verletintegration

blir alltså

x(t + h) = 2x(t) - x(t - h) + a(t)

Kan även uttryckas med hastighet
"velocity Verlet"

Att inte integrera hastigheten har också praktiska fördelar.
Man slipper justera hastigheten i kollissionsupplösning.

Till synes ytterst liten skillnad, i praktiken mycket bättre.

Adams-Bashforth

Tag med ett led till i Taylorserien.

$$x_{i+1} = x_i + 1/2 * h(3v_i - v_{i-1})$$

Kräver att vi känner hastigheten i de två tidigare tillstånden, den är inte "självstartande". Startas lämpligtvis med ett Eulersteg, första ordningens steg.

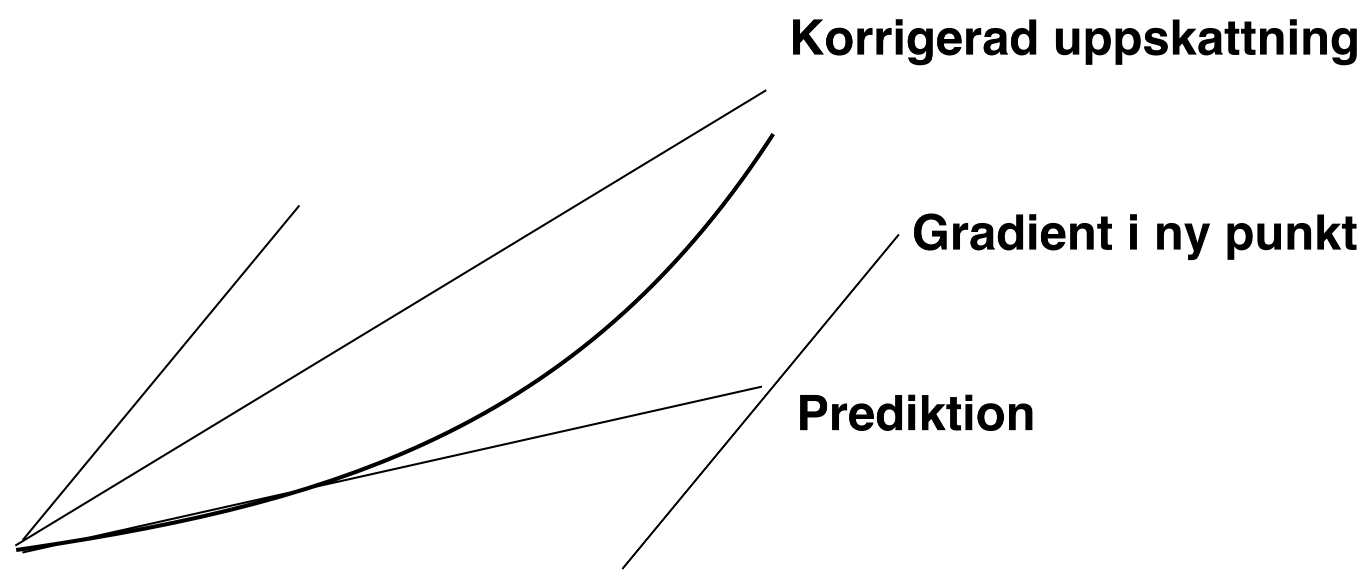
Ger ett fel på $O(h^3)$ i stället för $O(h^2)$

Predictor-corrector

Beräkna först ett preliminärt steg; prediktionen.

Beräkna gradienten i prediktionen.

Gör sedan en ny beräkning där medelvärdet mellan gradienterna i de två punkterna används.

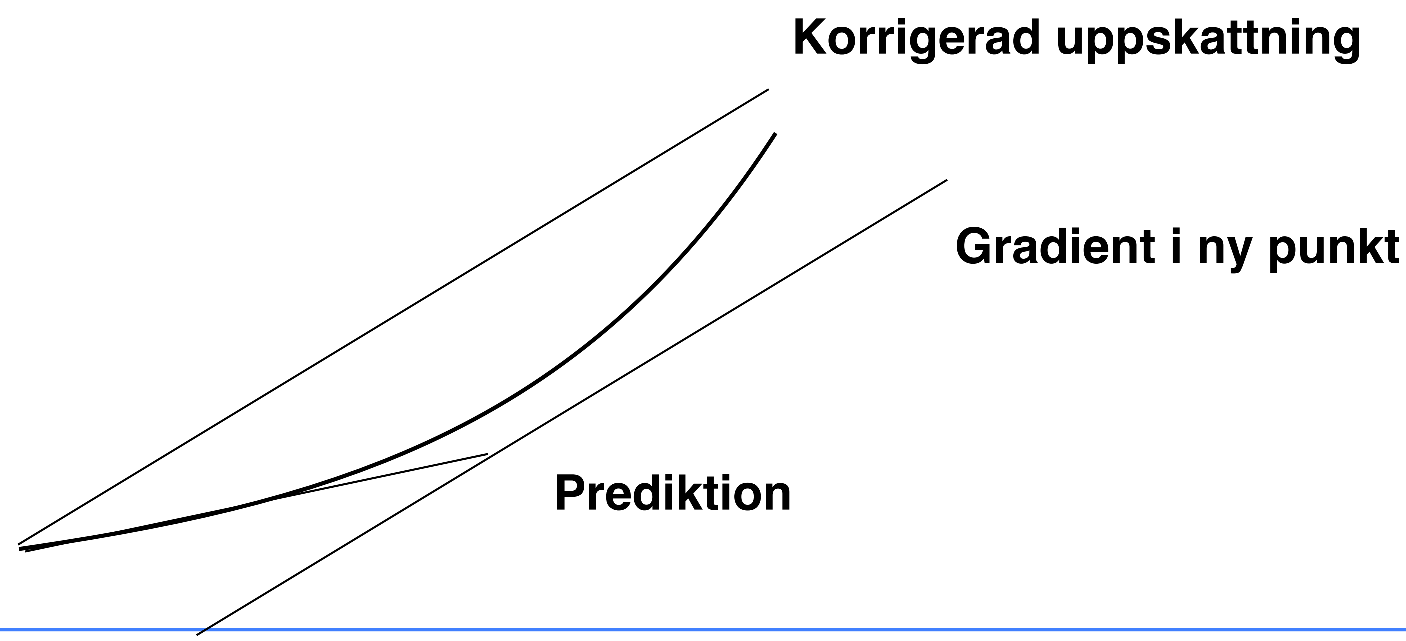


Midpoint

Gå ett halvt steg fram; prediktionen.

Beräkna gradienten i prediktionen.

Helt steg efter gradient i prediktionen.



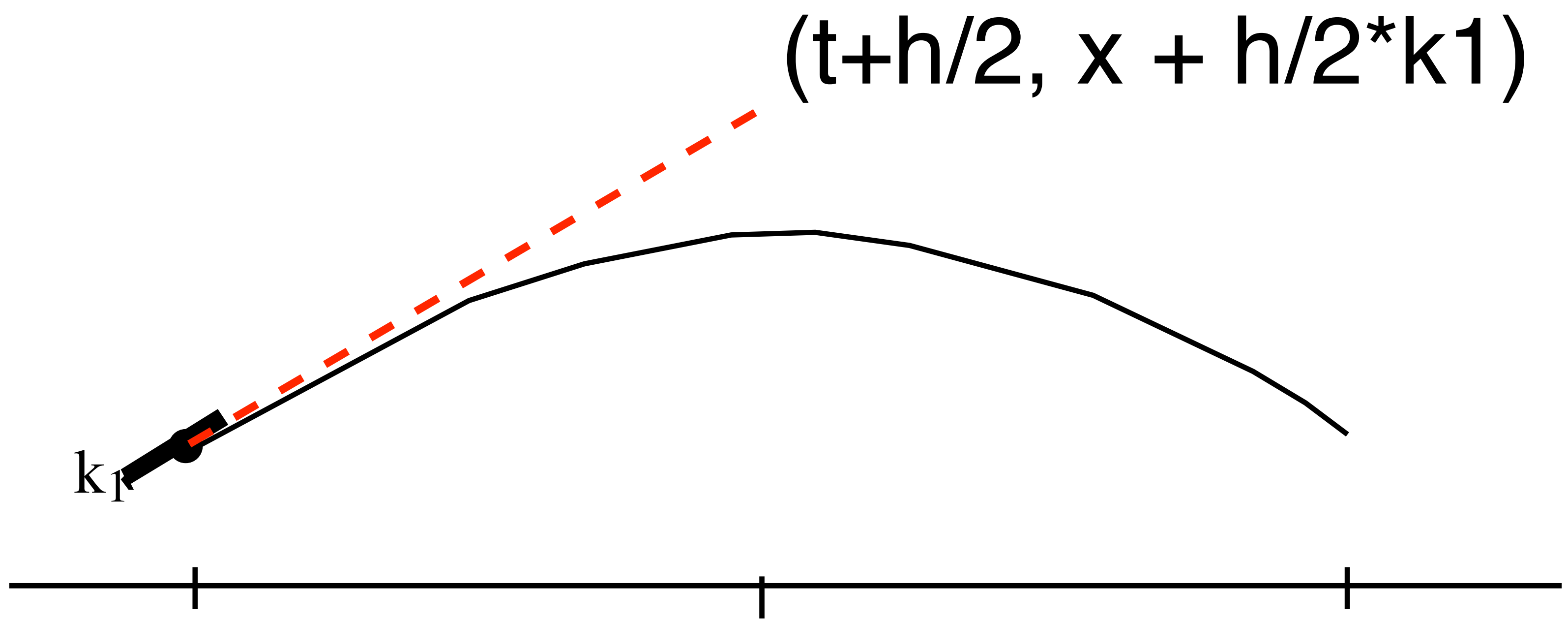
Runge-Kutta

Kan ses som utvidgning av Predictor-corrector eller Midpoint. Intervallet delas upp i flera steg, flera gradienter används.

Runge-Kutta, steg 1

Tag derivatan av funktionen, följ den ett halvt steg fram:

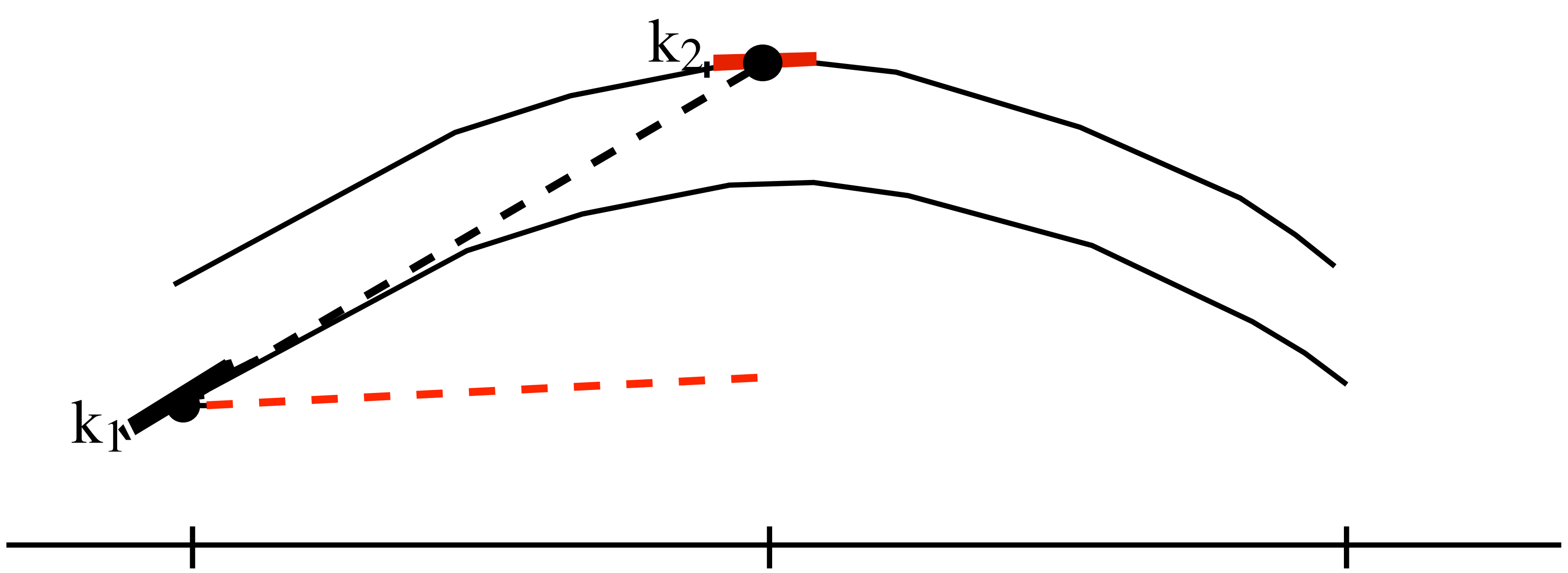
k1 = x'(t, x)



Runge-Kutta, steg 2

Tag derivatan av funktionen i den nya positionen, backa, följ den ett halvt steg fram:

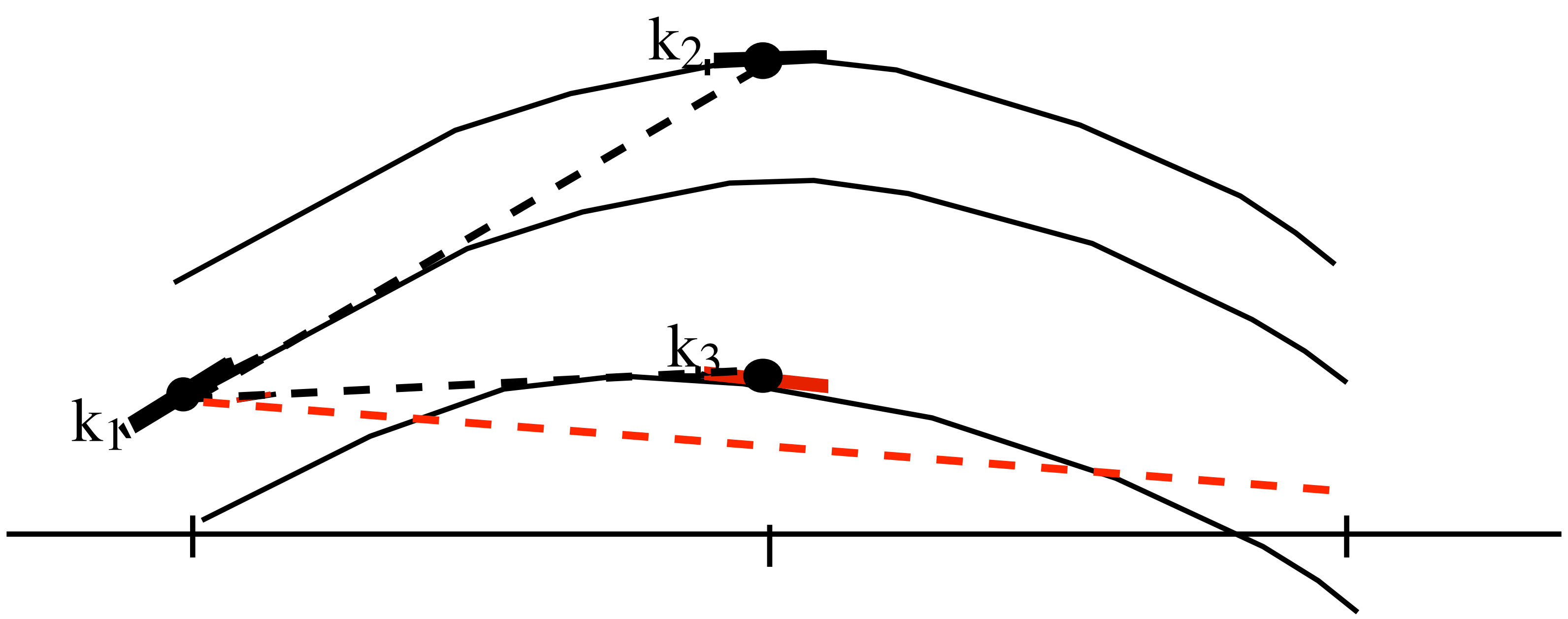
k2 = x'(t+h/2, x + h/2*k1)



Runge-Kutta, steg 3

Och en gång till...

k3 = x'(t+h/2, x + h/2*k2)

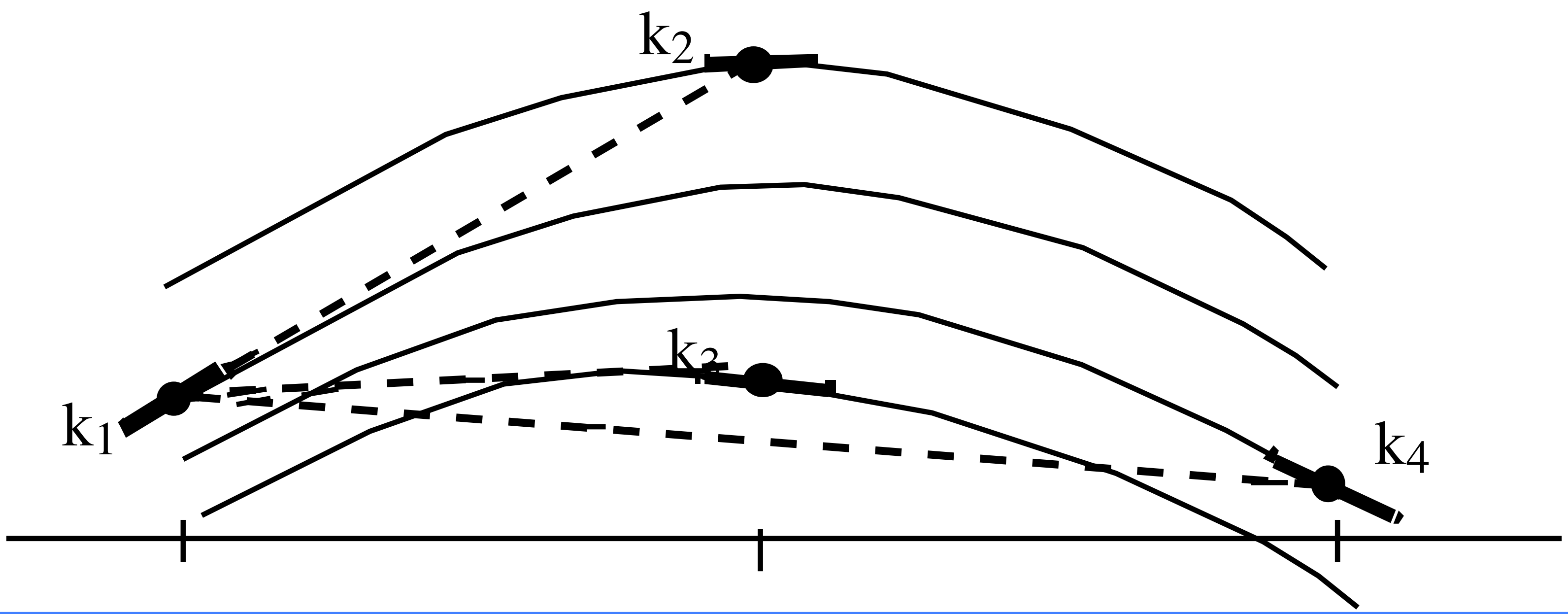


Runge-Kutta, steg 4

Sista gången tar vi ett helt steg fram.

k4 = x’(t+h, x + h*k3)

x(t+h) = x(t) + h*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6



Adaptiv steglängd

Steglängden h påverkar direkt felet, men felet är också lågt när funktionens högre derivator varierar långsamt.

Om vi varierar steglängden efter behov så kan felet hållas nere. Något felmått måste beräknas för att styra detta.

Slutsatser om integration

Viktig del av speciellt spelfysik. Tidsdiskret fysik -> integration av acceleration/hastighet i diskreta steg!

- **Euler lätt, men ger stora fel**
- **Verlet enkel metod för mycket bättre resultat**
- **Runge-Kutta bökigare, mer beräkningstung, men ger fina resultat.**